Bourgain-Delbaen $\mathcal{L}^\infty$ sums of Banach spaces

Δέσποινα Ζησιμοπούλου

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
ΕΜΠ
Τίτλος Διδακτορικής Διατρίβής: Χώροι Banach με λίγους τελεστές
Επιβλέπων: Σπυρίδων Αργυρός

Ημερίδα Διάχυσης Αποτελεσμάτων- Ηράκλειτος II
Ενίσχυση του ανθρώπινου δυναμικού μέσω της υλοποίησης διδακτορικής έρευνας, ΕΜΠ

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

- Οι χώροι Banach εντάσσονται στην κατηγορία των χώρων με νόρμα.
- Ένας χώρος με νόρμα X είναι ένας διανυσματικός χώρος στον οποίο ορίζεται επιπλέον μία απεικόνιση $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ που ονομάζεται νόρμα και ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:
  - $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
  - $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in X$.
  - $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ για κάθε $x, y \in X$.
- Οι έννοιες του υποχώρου και της διάστασης σε χώρους με νόρμα ορίζονται ακριβώς όπως στους διανυσματικούς χώρους.

Χώροι Banach

- Οι χώροι Banach εντάσσονται στην κατηγορία των χώρων με νόρμα.
- Ένας χώρος με νόρμα X είναι ένας διανυσματικός χώρος στον οποίο ορίζεται επιπλέον μία απεικόνιση $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ που ονομάζεται νόρμα και ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:
  - $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
  - $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in X$.
  - $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ για κάθε $x, y \in X$.
- Οι έννοιες του υποχώρου και της διάστασης σε χώρους με νόρμα ορίζονται ακριβώς όπως στους διανυσματικούς χώρους.

Χώροι Banach

- Οι χώροι Banach εντάσσονται στην κατηγορία των χώρων με νόρμα.
- Ένας χώρος με νόρμα X είναι ένας διανυσματικός χώρος στον οποίο ορίζεται επιπλέον μία απεικόνιση $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ που ονομάζεται νόρμα και ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:
  - $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
  - $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in X$.
  - $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ για κάθε $x, y \in X$.
- Οι έννοιες του υποχώρου και της διάστασης σε χώρους με νόρμα ορίζονται ακριβώς όπως στους διανυσματικούς χώρους.

Χώροι Banach

- Οι κλασσικοί χώροι ℓ_p, για $1 \leq p < \infty$,

$$\ell_p = \{\overrightarrow{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\},$$

είναι χώροι Banach και ειδικότερα ο ℓ_2 είναι χώρος Hilbert.

- Επιπλέον είναι διαχωρίσιμοι (δηλαδή περιέχουν αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο).

Χώροι Banach

- Οι κλασσικοί χώροι ℓ_p, για $1 \leq p < \infty$,

$$\ell_p = \{\overrightarrow{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\},$$

  είναι χώροι Banach και ειδικότερα ο ℓ_2 είναι χώρος Hilbert.

- Επιπλέον είναι διαχωρίσιμοι (δηλαδή περιέχουν αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο).

Χώροι Banach

- Αν $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ χώροι Banach, ο χώρος

$$\mathcal{L}(X,Y) = \{T : X \to Y \text{ γραμμικός, φραγμένος}\}$$

είναι χώρος Banach και για $T \in \mathcal{L}(X,Y)$

$$\|T\| = \sup\{T(x)\|_Y : \ \|x\|_X \leq 1\}$$

Χώροι Banach

- Ο χώρος $\mathcal{K}(X, Y) = \{T : X \to Y$ συμπαγής$\}$ είναι χώρος Banach.
- Ένας τελεστής $T : X \to Y$ λέγεται συμπαγής αν το σύνολο $T(B_X)$ είναι σχετικά συμπαγές υποσύνολο του Y, όπου $B_X = \{x \in X : \|x\|_X \leq 1\}$.
- Είναι γνωστό ότι ο $\mathcal{K}(\ell_p)$, για $1 \leq p < \infty$, είναι διαχωρίσιμος χώρος Banach.

Χώροι Banach

- Ο χώρος $\mathcal{K}(X,Y) = \{T : X \to Y$ συμπαγής$\}$ είναι χώρος Banach.
- Ένας τελεστής $T : X \to Y$ λέγεται συμπαγής αν το σύνολο $T(B_X)$ είναι σχετικά συμπαγές υποσύνολο του Y, όπου $B_X = \{x \in X : \ \|x\|_X \leq 1\}$.
- Είναι γνωστό ότι ο $\mathcal{K}(\ell_p)$, για $1 \leq p < \infty$, είναι διαχωρίσιμος χώρος Banach.

Χώροι Banach

- Ο χώρος $\mathcal{K}(X,Y) = \{T : X \to Y \text{ συμπαγής}\}$ είναι χώρος Banach.

- Ένας τελεστής $T : X \to Y$ λέγεται συμπαγής αν το σύνολο $T(B_X)$ είναι σχετικά συμπαγές υποσύνολο του Y, όπου $B_X = \{x \in X : \ \|x\|_X \leq 1\}$.

- Είναι γνωστό ότι ο $\mathcal{K}(\ell_p)$, για $1 \leq p < \infty$, είναι διαχωρίσιμος χώρος Banach.

Διασπασιμότητα χώρων Banach

- Ένας υπόχωρος Y σε ένα χώρο Banach X λέγεται συμπληρωματικός αν υπάρχει γραμμικός, φραγμένος τελεστής $P : X \to X$ ώστε $P^2 = P$ και εικόνα $ImP = P[X] = Y$. Ο τελεστής P λέγεται προβολή επί του Y.
- Αν $P : X \to X$ προβολή τότε $X = P[X] \oplus (I - P)[X]$, όπου $I : X \to X$ ο ταυτοτικός τελεστής.
- Κάθε υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης σε χώρο Banach είναι συμπληρωματικός.

- Ένας υπόχωρος Y σε ένα χώρο Banach X λέγεται συμπληρωματικός αν υπάρχει γραμμικός, φραγμένος τελεστής $P : X \to X$ ώστε $P^2 = P$ και εικόνα $ImP = P[X] = Y$. O τελεστής P λέγεται προβολή επί του Y.
- Αν $P : X \to X$ προβολή τότε $X = P[X] \oplus (I - P)[X]$, όπου $I : X \to X$ ο ταυτοτικός τελεστής.
- Κάθε υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης σε χώρο Banach είναι συμπληρωματικός.

Διασπασιμότητα χώρων Banach

- Ένας υπόχωρος Y σε ένα χώρο Banach X λέγεται συμπληρωματικός αν υπάρχει γραμμικός, φραγμένος τελεστής $P : X \to X$ ώστε $P^2 = P$ και εικόνα $ImP = P[X] = Y$. Ο τελεστής P λέγεται προβολή επί του Y.
- Αν $P : X \to X$ προβολή τότε $X = P[X] \oplus (I - P)[X]$, όπου $I : X \to X$ ο ταυτοτικός τελεστής.
- Κάθε υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης σε χώρο Banach είναι συμπληρωματικός.

Διασπασιμότητα χώρων Banach

- Ένας χώρος Banach X λέγεται αδιάσπαστος αν δε μπορεί να γραφτεί ως το ευθύ άθροισμα $X = Y \oplus Z$ όπου Y, Z απειροδιάστατοι υπόχωροι του X.

- Αν X χώρος Banach και κάθε τελεστής $T \in \mathcal{L}(X)$ είναι της μορφής $\lambda I + K$, οπου $\lambda \in \mathbb{R}$ και $K \in \mathcal{K}(X)$, τότε ο X είναι αδιάσπαστος.

- Οι Σ.Αργυρός και R. Haydon το 2010 ([3]) κατασκεύασαν ένα διαχωρίσιμο χώρο Banach $\mathfrak{X}_{AH}$ με την ιδιότητα ότι κάθε τελεστής $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}_{AH})$ είναι της μορφής $\lambda I + K$, οπου $\lambda \in \mathbb{R}$ και $K \in \mathcal{K}(\mathfrak{X}_{AH})$.

- Ένας χώρος Banach X λέγεται αδιάσπαστος αν δε μπορεί να γραφτεί ως το ευθύ άθροισμα $X = Y \oplus Z$ όπου Y, Z απειροδιάστατοι υπόχωροι του X.
- Αν X χώρος Banach και κάθε τελεστής $T \in \mathcal{L}(X)$ είναι της μορφής $\lambda I + K$, οπου $\lambda \in \mathbb{R}$ και $K \in \mathcal{K}(X)$, τότε ο X είναι αδιάσπαστος.
- Οι Σ.Αργυρός και R. Haydon το 2010 ([3]) κατασκεύασαν ένα διαχωρίσιμο χώρο Banach $\mathfrak{X}_{AH}$ με την ιδιότητα ότι κάθε τελεστής $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}_{AH})$ είναι της μορφής $\lambda I + K$, οπου $\lambda \in \mathbb{R}$ και $K \in \mathcal{K}(\mathfrak{X}_{AH})$.

Διασπασιμότητα χώρων Banach

- Ένας χώρος Banach X λέγεται αδιάσπαστος αν δε μπορεί να γραφτεί ως το ευθύ άθροισμα $X = Y \oplus Z$ όπου Y, Z απειροδιάστατοι υπόχωροι του X.
- Αν X χώρος Banach και κάθε τελεστής $T \in \mathcal{L}(X)$ είναι της μορφής $\lambda I + K$, οπου $\lambda \in \mathbb{R}$ και $K \in \mathcal{K}(X)$, τότε ο X είναι αδιάσπαστος.
- Οι Σ.Αργυρός και R. Haydon το 2010 ([3]) κατασκεύασαν ένα διαχωρίσιμο χώρο Banach $\mathfrak{X}_{AH}$ με την ιδιότητα ότι κάθε τελεστής $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}_{AH})$ είναι της μορφής $\lambda I + K$, οπου $\lambda \in \mathbb{R}$ και $K \in \mathcal{K}(\mathfrak{X}_{AH})$.

- Επιπλέον, ο $\mathfrak{X}_{AH}$ είναι καθολικά αδιάσπαστος δηλαδή έχει την ιδιότητα του ότι κάθε απειροδιάστατος υπόχωρος του είναι αδιάσπαστος.

- Ο πρώτος καθολικά αδιάσπαστος χώρος Banach κατασκευάστηκε το 1992 από τους W.T. Gowers, B. Maurey([9]) και όλα τα παραδείγματα μέχρι σήμερα είναι κατασκευαστικά ([2],[4]).

- Η μέθοδος που χρησιμοποίησαν βασίζεται σε νέες τεχνικές ορισμού νόρμας.

Καθολικά Αδιάσπαστοι χώροι Banach

- Επιπλέον, ο $\mathfrak{X}_{AH}$ είναι καθολικά αδιάσπαστος δηλαδή έχει την ιδιότητα του ότι κάθε απειροδιάστατος υπόχωρος του είναι αδιάσπαστος.
- Ο πρώτος καθολικά αδιάσπαστος χώρος Banach κατασκευάστηκε το 1992 από τους W.T. Gowers, B. Maurey([9]) και όλα τα παραδείγματα μέχρι σήμερα είναι κατασκευαστικά ([2],[4]).
- Η μέθοδος που χρησιμοποίησαν βασίζεται σε νέες τεχνικές ορισμού νόρμας.

Καθολικά Αδιάσπαστοι χώροι Banach

- Επιπλέον, ο $\mathfrak{X}_{AH}$ είναι καθολικά αδιάσπαστος δηλαδή έχει την ιδιότητα του ότι κάθε απειροδιάστατος υπόχωρος του είναι αδιάσπαστος.
- Ο πρώτος καθολικά αδιάσπαστος χώρος Banach κατασκευάστηκε το 1992 από τους W.T. Gowers, B. Maurey([9]) και όλα τα παραδείγματα μέχρι σήμερα είναι κατασκευαστικά ([2],[4]).
- Η μέθοδος που χρησιμοποίησαν βασίζεται σε νέες τεχνικές ορισμού νόρμας.

- Αν X αδιάσπαστος χώρος Banach και Y ισόμορφος με τον X τότε ο Y είναι αδιάσπαστος.
- Λέμε ότι ο Y είναι ισόμορφος με τον X, $Y \simeq X$, αν υπάρχει $T : X \to Y$ γραμμικός, φραγμένος, 1-1 και επί τελεστής. Αν επιπλέον $\|T\|\|T^{-1}\| \leq C$, όπου $C > 0$ σταθερά, τότε λέμε ότι ο Y είναι C-ισόμορφος με τον X, $X \simeq^C Y$.
- Είναι γνωστό ότι $\ell_p \simeq \ell_p \oplus \ell_p$ και δεν περιέχει καθολικά αδιάσπαστο υπόχωρο.

Καθολικά Αδιάσπαστοι χώροι Banach

- Αν X αδιάσπαστος χώρος Banach και Y ισόμορφος με τον X τότε ο Y είναι αδιάσπαστος.
- Λέμε ότι ο Y είναι ισόμορφος με τον X, $Y \simeq X$, αν υπάρχει $T : X \to Y$ γραμμικός, φραγμένος, 1-1 και επί τελεστής. Αν επιπλέον $\|T\|\|T^{-1}\| \leq C$, όπου $C > 0$ σταθερά, τότε λέμε ότι ο Y είναι C-ισόμορφος με τον X, $X \simeq^C Y$.
- Είναι γνωστό ότι $\ell_p \simeq \ell_p \oplus \ell_p$ και δεν περιέχει καθολικά αδιάσπαστο υπόχωρο.

Καθολικά Αδιάσπαστοι χώροι Banach

- Αν X αδιάσπαστος χώρος Banach και Y ισόμορφος με τον X τότε ο Y είναι αδιάσπαστος.

- Λέμε ότι ο Y είναι ισόμορφος με τον X, $Y \simeq X$, αν υπάρχει $T : X \to Y$ γραμμικός, φραγμένος, 1-1 και επί τελεστής. Αν επιπλέον $\|T\|\|T^{-1}\| \leq C$, όπου $C > 0$ σταθερά, τότε λέμε ότι ο Y είναι C-ισόμορφος με τον X, $X \simeq^C Y$.

- Είναι γνωστό ότι $\ell_p \simeq \ell_p \oplus \ell_p$ και δεν περιέχει καθολικά αδιάσπαστο υπόχωρο.

- Το 2001 οι Σ. Αργυρός, Β. Φελουζής ([1]) όρισαν

$$(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n)_{GM}$$

για ακολουθία $(X_n, \|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ διαχωρίσιμων χώρων Banach όπου η εξωτερική νόρμα $\|\cdot\|_{GM}$ προέρχεται από τη μέθοδο κατασκευής των Gowers, Maurey.

- Εν συνεχεία, το 2008 οι Σ. Αργυρός και Θ. Ραικόφτσαλης ([5]) μελέτησαν τις ειδικές περιπτώσεις

$$\mathfrak{X}_p = (\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_p)_{GM}, \ 1 \leq p < \infty.$$

- Παρουσιάζουμε μία μέθοδο δημιουργίας ευθέων αθροισμάτων

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n\Big)_{AH}$$

για ακολουθίες $(X_n, \|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ διαχωρίσιμων χώρων Banach, όπου η εξωτερική νόρμα προέρχεται από την AH-μέθοδο.

- Η ΑΗ-μέθοδος αποτελεί μία γενικευμένη παραλλαγή της μεθόδου κατασκευής $\mathcal{L}_\infty$ χώρων των J. Bourgain- F.Delbaen (1980,[6]).

Ορισμός

Ένας χώρος Banach X λέγεται $\mathcal{L}_\infty$ αν υπάρχει σταθερά $C > 0$ μία αύξουσα ακολουθία $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ πεπερασμένης διάστασης υποχώρων του X, ώστε η ένωση $\cup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ είναι πυκνή στον X και $X_n \simeq^C \ell^\infty(\dim X_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

- Η ΑΗ-μέθοδος αποτελεί μία γενικευμένη παραλλαγή της μεθόδου κατασκευής $\mathcal{L}_\infty$ χώρων των J. Bourgain- F.Delbaen (1980,[6]).

Ορισμός

Ένας χώρος Banach X λέγεται $\mathcal{L}_\infty$ αν υπάρχει σταθερά $C > 0$ μία αύξουσα ακολουθία $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ πεπερασμένης διάστασης υποχώρων του X, ώστε η ένωση $\cup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ είναι πυκνή στον X και $X_n \simeq^C \ell^\infty(\dim X_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

AH-$\mathcal{L}_\infty$ Ευθέα αθροίσματα χώρων Banach

- Ορίζουμε
$$(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n)_{BD}$$
για ακολουθίες $(X_n, \|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ διαχωρίσιμων χώρων Banach με εξωτερική νόρμα που προέρχεται από τη $\mathcal{L}_\infty$ BD-μέθοδο.
- Τροποποιούμε τη μέθοδο κατασκευής $(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n)_{BD}$ με βάση τη $\mathcal{L}_\infty$ AH-μέθοδο κατασκευάζουμε $(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n)_{AH}$.
- Ο $(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n)_{AH}$ περιέχει καθολικά αδιάσπαστους υποχώρους.

AH-$\mathcal{L}_\infty$ Ευθέα αθροίσματα χώρων Banach

- Ορίζουμε
$$(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n)_{BD}$$
για ακολουθίες $(X_n, \|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ διαχωρίσιμων χώρων Banach με εξωτερική νόρμα που προέρχεται από τη $\mathcal{L}_\infty$ BD-μέθοδο.

- Τροποποιούμε τη μέθοδο κατασκευής $(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n)_{BD}$ με βάση τη $\mathcal{L}_\infty$ AH-μέθοδο κατασκευάζουμε $(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n)_{AH}$.

- Ο $(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n)_{AH}$ περιέχει καθολικά αδιάσπαστους υποχώρους.

AH-$\mathcal{L}_\infty$ Ευθέα αθροίσματα χώρων Banach

- Ορίζουμε
$$(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n)_{BD}$$
για ακολουθίες $(X_n, \|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ διαχωρίσιμων χώρων Banach με εξωτερική νόρμα που προέρχεται από τη $\mathcal{L}_\infty$ BD-μέθοδο.

- Τροποποιούμε τη μέθοδο κατασκευής $(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n)_{BD}$ με βάση τη $\mathcal{L}_\infty$ AH-μέθοδο κατασκευάζουμε $(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n)_{AH}$.

- Ο $(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n)_{AH}$ περιέχει καθολικά αδιάσπαστους υποχώρους.

Οι χώροι $\mathcal{Z}_p$, $1 \leq p < \infty$

- Άρα για $1 \leq p < \infty$, ο $\mathcal{Z}_p = (\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_p)_{AH}$ δε μπορεί να είναι ισόμορφος με τον ℓ_p.
- Υπάρχουν προβολές $P_{[1,n]} : \mathcal{Z}_p \to \mathcal{Z}_p$ ώστε $\|P_{[1,n]}\| \leq 2$, $P_{[1,n]}[\mathcal{Z}_p] \simeq \ell_p$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και η ένωση $\cup_{n=1}^{\infty} P_{[1,n]}[\mathcal{Z}_p]$ είναι πυκνή στον $\mathcal{Z}_p$.
- Αν $\mathcal{Z}_p = Y \oplus Z$, τότε είτε $Y \simeq \ell_p$ και $Z \simeq \mathcal{Z}_p$ ή αντίστροφα.
- Επομένως, $P_{(n,\infty)}[\mathcal{Z}_p] \simeq \mathcal{Z}_p$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου $P_{(n,\infty)} = I - P_{[1,n]}$ και $I : \mathcal{Z}_p \to \mathcal{Z}_p$ ο ταυτοτικός τελεστής.

Οι χώροι $\mathcal{Z}_p$, $1 \le p < \infty$

- Άρα για $1 \le p < \infty$, ο $\mathcal{Z}_p = (\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_p)_{AH}$ δε μπορεί να είναι ισόμορφος με τον ℓ_p.
- Υπάρχουν προβολές $P_{[1,n]} : \mathcal{Z}_p \to \mathcal{Z}_p$ ώστε $\|P_{[1,n]}\| \le 2$, $P_{[1,n]}[\mathcal{Z}_p] \simeq \ell_p$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και η ένωση $\cup_{n=1}^{\infty} P_{[1,n]}[\mathcal{Z}_p]$ είναι πυκνή στον $\mathcal{Z}_p$.
- Αν $\mathcal{Z}_p = Y \oplus Z$, τότε είτε $Y \simeq \ell_p$ και $Z \simeq \mathcal{Z}_p$ ή αντίστροφα.
- Επομένως, $P_{(n,\infty)}[\mathcal{Z}_p] \simeq \mathcal{Z}_p$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου $P_{(n,\infty)} = I - P_{[1,n]}$ και $I : \mathcal{Z}_p \to \mathcal{Z}_p$ ο ταυτοτικός τελεστής.

Οι χώροι $\mathcal{Z}_p$, $1 \le p < \infty$

- Άρα για $1 \le p < \infty$, ο $\mathcal{Z}_p = (\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_p)_{AH}$ δε μπορεί να είναι ισόμορφος με τον ℓ_p.
- Υπάρχουν προβολές $P_{[1,n]} : \mathcal{Z}_p \to \mathcal{Z}_p$ ώστε $\|P_{[1,n]}\| \le 2$, $P_{[1,n]}[\mathcal{Z}_p] \simeq \ell_p$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και η ένωση $\cup_{n=1}^{\infty} P_{[1,n]}[\mathcal{Z}_p]$ είναι πυκνή στον $\mathcal{Z}_p$.
- Αν $\mathcal{Z}_p = Y \oplus Z$, τότε είτε $Y \simeq \ell_p$ και $Z \simeq \mathcal{Z}_p$ ή αντίστροφα.
- Επομένως, $P_{(n,\infty)}[\mathcal{Z}_p] \simeq \mathcal{Z}_p$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου $P_{(n,\infty)} = I - P_{[1,n]}$ και $I : \mathcal{Z}_p \to \mathcal{Z}_p$ ο ταυτοτικός τελεστής.

Οι χώροι $\mathcal{Z}_p$, $1 \leq p < \infty$

- Άρα για $1 \leq p < \infty$, ο $\mathcal{Z}_p = (\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_p)_{AH}$ δε μπορεί να είναι ισόμορφος με τον ℓ_p.
- Υπάρχουν προβολές $P_{[1,n]} : \mathcal{Z}_p \to \mathcal{Z}_p$ ώστε $\|P_{[1,n]}\| \leq 2$, $P_{[1,n]}[\mathcal{Z}_p] \simeq \ell_p$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και η ένωση $\cup_{n=1}^{\infty} P_{[1,n]}[\mathcal{Z}_p]$ είναι πυκνή στον $\mathcal{Z}_p$.
- Αν $\mathcal{Z}_p = Y \oplus Z$, τότε είτε $Y \simeq \ell_p$ και $Z \simeq \mathcal{Z}_p$ ή αντίστροφα.
- Επομένως, $P_{(n,\infty)}[\mathcal{Z}_p] \simeq \mathcal{Z}_p$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου $P_{(n,\infty)} = I - P_{[1,n]}$ και $I : \mathcal{Z}_p \to \mathcal{Z}_p$ ο ταυτοτικός τελεστής.

- Ένας τελεστής $T \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}_p)$ λέγεται οριζόντια συμπαγής, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\|K \circ P_{(n_0,\infty)}\| < \varepsilon.$$

Πρόταση

Έστω $1 \leq p < \infty$ και $T \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}_p)$. Τότε υπάρχει πραγματικός αριθμός λ ώστε θέτοντας $K = T - \lambda I$, ο τελεστής K είναι οριζόντια συμπαγής.

- Ένας τελεστής $T \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}_p)$ λέγεται οριζόντια συμπαγής, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\|K \circ P_{(n_0,\infty)}\| < \varepsilon.$$

Πρόταση

Έστω $1 \leq p < \infty$ και $T \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}_p)$. Τότε υπάρχει πραγματικός αριθμός λ ώστε θέτοντας $K = T - \lambda I$, ο τελεστής K είναι οριζόντια συμπαγής.

- Για $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $\mathcal{Z}_p^n = (\underbrace{\mathcal{Z}_p \oplus \ldots \oplus \mathcal{Z}_p}_{n-\text{ φορές}})_\infty$.

Θεώρημα

Για κάθε $1 \leq p < \infty$ και $n \in \mathbb{N}$ ο χώρος $\mathcal{Z}_p^n$ έχει ακριβώς $n+1$ απειροδιάστατους, μη ισόμορφους ανά δύο, συμπληρωματικούς υποχώρους.

- Ανάλογα αποτελέσματα είχαν προκύψει από άλλους ερευνητές στο παρελθόν ([7],[8],[10],[11]) με χρήση διαφορετικών μεθόδων.

- Για $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $\mathcal{Z}_p^n = (\underbrace{\mathcal{Z}_p \oplus \ldots \oplus \mathcal{Z}_p}_{n-\text{ φορές}})_\infty$.

Θεώρημα

Για κάθε $1 \leq p < \infty$ και $n \in \mathbb{N}$ ο χώρος $\mathcal{Z}_p^n$ έχει ακριβώς $n+1$ απειροδιάστατους, μη ισόμορφους ανά δύο, συμπληρωματικούς υποχώρους.

- Ανάλογα αποτελέσματα είχαν προκύψει από άλλους ερευνητές στο παρελθόν ([7],[8],[10],[11]) με χρήση διαφορετικών μεθόδων.

- Για $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $\mathcal{Z}_p^n = (\underbrace{\mathcal{Z}_p \oplus \ldots \oplus \mathcal{Z}_p}_{n-\text{ φορές}})_\infty$.

Θεώρημα

Για κάθε $1 \leq p < \infty$ και $n \in \mathbb{N}$ ο χώρος $\mathcal{Z}_p^n$ έχει ακριβώς $n+1$ απειροδιάστατους, μη ισόμορφους ανά δύο, συμπληρωματικούς υποχώρους.

- Ανάλογα αποτελέσματα είχαν προκύψει από άλλους ερευνητές στο παρελθόν ([7],[8],[10],[11]) με χρήση διαφορετικών μεθόδων.

Συμπληρωματικοί υπόχωροι του $\mathcal{Z}_p^n$

- Για $n \neq m$, ο χώρος $\mathcal{Z}_p^n$ δεν είναι ισόμορφος με τον χώρο $\mathcal{Z}_p^m$. Άρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο $\mathcal{Z}_p^n$ έχει τουλάχιστον $n+1$, μη ισόμορφους ανά δύο, συμπληρωματικούς υποχώρους.

Πρόταση

Έστω $n \in \mathbb{N}$ και Y ένας απειροδιάστατος συμπληρωματικός υπόχωρος του $\mathcal{Z}_p^n$. Τότε είτε $Y \simeq \ell_p$ ή υπάρχει $L \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ μη κενό ώστε $Y \simeq (\sum_{i \in L} \oplus \mathcal{Z}_p)_\infty$.

Συμπληρωματικοί υπόχωροι του $\mathcal{Z}_p^n$

- Για $n \neq m$, ο χώρος $\mathcal{Z}_p^n$ δεν είναι ισόμορφος με τον χώρο $\mathcal{Z}_p^m$. Άρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο $\mathcal{Z}_p^n$ έχει τουλάχιστον $n+1$, μη ισόμορφους ανά δύο, συμπληρωματικούς υποχώρους.

Πρόταση

Έστω $n \in \mathbb{N}$ και Y ένας απειροδιάστατος συμπληρωματικός υπόχωρος του $\mathcal{Z}_p^n$. Τότε είτε $Y \simeq \ell_p$ ή υπάρχει $L \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ μη κενό ώστε $Y \simeq (\sum_{i \in L} \oplus \mathcal{Z}_p)_\infty$.

- Έστω $1 \leq p < \infty$ και $T \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}_p^n)$.
- Αν για κάθε i, $\mathcal{Z}_p(i)$ είναι ο χώρος $\mathcal{Z}_p$ στην i-συντεταγμένη του $\mathcal{Z}_p^n$, τότε

$$T = (T_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \quad \text{όπου} \quad T_{i,j} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}_p(j), \mathcal{Z}_p(i)) \ .$$

- $T_{i,j} = \lambda_{i,j} I_{i,j} + K_{i,j}$ όπου $\lambda_{i,j} \in \mathbb{R}$, $I_{i,j} : \mathcal{Z}_p(j) \to \mathcal{Z}_p(i)$ είναι ο ταυτοτικός τελεστής και $K_{i,j} : \mathcal{Z}_p(j) \to \mathcal{Z}_p(i)$ είναι οριζόντια συμπαγής τελεστής.
- Αν T προβολή, τότε $\Lambda = (\lambda_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ προβολή.

- Έστω $1 \leq p < \infty$ και $T \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}_p^n)$.

- Αν για κάθε i, $\mathcal{Z}_p(i)$ είναι ο χώρος $\mathcal{Z}_p$ στην i-συντεταγμένη του $\mathcal{Z}_p^n$, τότε

$$T = (T_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \text{ όπου } T_{i,j} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}_p(j), \mathcal{Z}_p(i)) \ .$$

- $T_{i,j} = \lambda_{i,j} I_{i,j} + K_{i,j}$ όπου $\lambda_{i,j} \in \mathbb{R}$, $I_{i,j} : \mathcal{Z}_p(j) \to \mathcal{Z}_p(i)$ είναι ο ταυτοτικός τελεστής και $K_{i,j} : \mathcal{Z}_p(j) \to \mathcal{Z}_p(i)$ είναι οριζόντια συμπαγής τελεστής.

- Αν T προβολή, τότε $\Lambda = (\lambda_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ προβολή.

Συμπληρωματικοί υπόχωροι του $\mathcal{Z}_p^n$

- Έστω $1 \leq p < \infty$ και $T \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}_p^n)$.
- Αν για κάθε i, $\mathcal{Z}_p(i)$ είναι ο χώρος $\mathcal{Z}_p$ στην i-συντεταγμένη του $\mathcal{Z}_p^n$, τότε

$$T = (T_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \quad \text{όπου} \quad T_{i,j} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}_p(j), \mathcal{Z}_p(i)) \ .$$

- $T_{i,j} = \lambda_{i,j} I_{i,j} + K_{i,j}$ όπου $\lambda_{i,j} \in \mathbb{R}$, $I_{i,j} : \mathcal{Z}_p(j) \to \mathcal{Z}_p(i)$ είναι ο ταυτοτικός τελεστής και $K_{i,j} : \mathcal{Z}_p(j) \to \mathcal{Z}_p(i)$ είναι οριζόντια συμπαγής τελεστής.
- Αν T προβολή, τότε $\Lambda = (\lambda_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ προβολή.

- Έστω $1 \leq p < \infty$ και $T \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}_p^n)$.
- Αν για κάθε i, $\mathcal{Z}_p(i)$ είναι ο χώρος $\mathcal{Z}_p$ στην i-συντεταγμένη του $\mathcal{Z}_p^n$, τότε

$$T = (T_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \ \text{ όπου } \ T_{i,j} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}_p(j), \mathcal{Z}_p(i)) \ .$$

- $T_{i,j} = \lambda_{i,j} I_{i,j} + K_{i,j}$ όπου $\lambda_{i,j} \in \mathbb{R}$, $I_{i,j} : \mathcal{Z}_p(j) \to \mathcal{Z}_p(i)$ είναι ο ταυτοτικός τελεστής και $K_{i,j} : \mathcal{Z}_p(j) \to \mathcal{Z}_p(i)$ είναι οριζόντια συμπαγής τελεστής.
- Αν T προβολή, τότε $\Lambda = (\lambda_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ προβολή.

- Επιπλέον, υπάρχει προβολή $\tilde{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}_p^n)$ ώστε $ImT \simeq Im\tilde{T}$ και
$$\tilde{T} = (\tilde{\lambda}_{i,j} I_{i,j} + \tilde{K}_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$$
έτσι ώστε $\tilde{\lambda}_{i,j} = 0$ για κάθε $i \neq j$, $\tilde{\lambda}_{i,i} = 0$ ή 1,και $\tilde{K}_{i,j} : \mathcal{Z}_p(j) \to \mathcal{Z}_p(i)$ είναι οριζόντια συμπαγής τελεστής για κάθε $1 \le i, j \le n$.
- Θέτουμε $L = \{i : \tilde{\lambda}_{i,i} = 1\}$ και διακρίνουμε περιπτώσεις:
- Αν $L = \emptyset$ τότε αποδεικνύεται ότι $ImT \simeq \ell_p$.

- Επιπλέον, υπάρχει προβολή $\tilde{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}_p^n)$ ώστε $ImT \simeq Im\tilde{T}$ και
$$\tilde{T} = (\tilde{\lambda}_{i,j} I_{i,j} + \tilde{K}_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$$
έτσι ώστε $\tilde{\lambda}_{i,j} = 0$ για κάθε $i \neq j$, $\tilde{\lambda}_{i,i} = 0$ ή 1,και $\tilde{K}_{i,j} : \mathcal{Z}_p(j) \to \mathcal{Z}_p(i)$ είναι οριζόντια συμπαγής τελεστής για κάθε $1 \leq i, j \leq n$.

- Θέτουμε $L = \{i : \ \tilde{\lambda}_{i,i} = 1\}$ και διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $L = \emptyset$ τότε αποδεικνύεται ότι $ImT \simeq \ell_p$.

- Επιπλέον, υπάρχει προβολή $\tilde{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}_p^n)$ ώστε $ImT \simeq Im\tilde{T}$ και
$$\tilde{T} = (\tilde{\lambda}_{i,j} I_{i,j} + \tilde{K}_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$$
έτσι ώστε $\tilde{\lambda}_{i,j} = 0$ για κάθε $i \neq j$, $\tilde{\lambda}_{i,i} = 0$ ή 1,και $\tilde{K}_{i,j} : \mathcal{Z}_p(j) \to \mathcal{Z}_p(i)$ είναι οριζόντια συμπαγής τελεστής για κάθε $1 \leq i, j \leq n$.

- Θέτουμε $L = \{i : \ \tilde{\lambda}_{i,i} = 1\}$ και διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $L = \emptyset$ τότε αποδεικνύεται ότι $ImT \simeq \ell_p$.

- Αν $L \neq \emptyset$, για κατάλληλα $0 < \delta < 1$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\|\tilde{K}_{i_j} \circ P_{(n_0,\infty)}\| < \delta$ αποδεικνύεται ότι

$$Im\tilde{T} \simeq (\sum_{i\in L} \oplus P_{(n_0,\infty)}[\mathcal{Z}_p]) \oplus W$$

όπου $W \simeq \ell_p$.

- Επειδή $(\sum_{i\in L} \oplus \ell_p) \simeq \ell_p$ και $\mathcal{Z}_p \simeq P_{(n_0,\infty)}[\mathcal{Z}_p] \oplus \ell_p$ συνεπάγεται ότι

$$ImT \simeq (\sum_{i\in L} \oplus \mathcal{Z}_p)_\infty$$

- Αν $L \neq \emptyset$, για κατάλληλα $0 < \delta < 1$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\|\tilde{K}_{i_j} \circ P_{(n_0,\infty)}\| < \delta$ αποδεικνύεται ότι

$$Im\tilde{T} \simeq (\sum_{i \in L} \oplus P_{(n_0,\infty)}[\mathcal{Z}_p]) \oplus W$$

όπου $W \simeq \ell_p$.

- Επειδή $(\sum_{i \in L} \oplus \ell_p) \simeq \ell_p$ και $\mathcal{Z}_p \simeq P_{(n_0,\infty)}[\mathcal{Z}_p] \oplus \ell_p$ συνεπάγεται ότι

$$ImT \simeq (\sum_{i \in L} \oplus \mathcal{Z}_p)_\infty$$

AH-$\mathcal{L}_\infty$ Ευθέα αθροίσματα χώρων Banach

- Η μέθοδος δημιουργίας ευθέων αθροισμάτων $(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n)_{AH}$ έχει οδηγήσει σε νέα αποτελέσματα που βρίσκονται υπο προετοιμασία.

Βιβλιογραφία

[1] S.A. Argyros and V. Felouzis, *Interpolating Hereditarily Indecomposable Banach spaces*, Journal AMS, 13(2001), 243-294.

[2] S.A. Argyros, D. Freeman, R. Haydon, E. Odell, Th. Raikoftsalis, Th. Schlumprecht, and D. Zisimopoulou, *Embedding uniformly convex spaces into spaces with very few operators*, Journal of Functional Analysis, Vol. **262**, 825–849 (2012).

[3] S.A. Argyros and R.G. Haydon, *A hereditarily indecomposable $\mathcal{L}^\infty$-space that solves the scalar-plus-compact problem*, Acta Mathematica , vol. **206**, 1–54, (2011).

[4] S. A. Argyros and A. Tolias, *Methods in the theory of hereditarily indecomposable Banach spaces*, Memoirs of the AMS, 170(2004), no.806.

- [5] S. A. Argyros and Th. Raikoftsalis, *Banach spaces with non trivial decomposition*, Proceedings of Amer. Math. Soc., vol. **136**, 3611–3620, (2008).
- [6] J. Bourgain and F. Delbaen, *A class of special $\mathcal{L}^\infty$ spaces*, Acta Mathematika, Vol.145,(1980), 155–176.
- [7] I. S. Edelstein, P. Wojtaszczyk, *On projections and unconditional bases in direct sums of Banach spaces*, Studia Math, 56 (1976), no.3, 263–276.
- [8] V. Ferenzi and M. E. Galego, *Some results on the Schroeder-Dernstein property for separable Banach spaces*, Canad. J. Math., 59 (2007), no. 1, 63–84.
- [9] W. T. Gowers and B. Maurey, *The unconditional basic sequence problem*, J. Amer. Math. Soc. 6(1993), no. 4, 851-874.

[10] W.T. Gowers and B. Maurey, *Banach spaces with small spaces of operators*, Math. Ann. vol. **307**, 543–568, (1997).

[11] P. Wojtaszczyk, *On complemented subspaces and unconditional bases in* $\ell_p \oplus \ell_q$, Studia Math, 47 (1973), 197–206.